o sigui,

$$\sin C - \sin(B - C) = 0$$

i una nova aplicació de les fórmules de transformació de sumes en productes dóna

$$\sin \frac{B}{2} \cos \frac{2C - B}{2} = 0$$

que obliga a

$$\cos \frac{2C - B}{2} = 0\,,$$

és a dir,

$$\frac{2C - B}{2} = 90^\circ$$

i, finalment,

$$2C - B = 180^\circ$$

com es volia.

Coda:
En un triangle així, en el qual $2C - B = 180^\circ$ es compleix també que:

1) Si la bisectriu exterior de l'angle A talla BC en F i la circumferència inscrita és tangent al costat AB en K, aleshores,

$$CF = 2AK\,.$$

2) Si M és el punt mitjà del costat BC i, si la circumferència de centre A i radi AM talla BC en el punt N, aleshores,

$$MN = AB\,.$$

Aquests dos resultats foren proposats pel professor Toshio Seimiya, del Japó, a la revista *Crux Mathematicorum* com a problemes 2.303 (febrer 1998) i 2.316 (març 1998). Les respectives solucions es troben en els números de febrer i març del 1999.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Carlos Arturo Escudero Salcedo va llegir la seva tesi, dirigida per Agustí Reventós Tarrida, titulada *Conjuntos focales en variedades de Riemann de curvatura acotada*, el dia 20 de setembre de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Podem considerar que l'origen llunyà d'aquesta tesi és la desigualtat següent: si $C = \partial K$ és la vora d'un conjunt K compacte, convex d'àrea F de $\mathbb{R}^2$, llavors

$$\int_C \frac{1}{k} ds \geqslant 2F, \tag{1}$$

on $k = k(s)(> 0)$ és la funció de curvatura C i ds significa la mesura de la longitud de l'arc sobre C. La igualtat es dóna si i només si C és un cercle.

En aquesta tesi es dóna una prova nova, molt curta, de (1), que té l'avantatge de proporcionar una interpretació geomètrica de la diferència $2F - \int_C k^{-1} ds$. Concretament, es demostra que

$$\int_C \frac{1}{k} ds = 2(F - F_e), \tag{2}$$

on $F_e(\leq 0)$ és l'àrea (algebraica) del domini acotat per l'evoluta de C.

La desigualtat (1) és l'anàleg dos-dimensional de la desigualtat de Heintze i Karcher:

$$\int_S \frac{1}{H} dA \geqslant 3V,$$

on $H(> 0)$ és la curvatura mitjana d'una superfície S compacta, encaixada a $\mathbb{R}^3$, vora d'un domini D de volum V. És sabut que la igualtat es dóna si i només si S és una esfera.

El concepte d'evoluta, o conjunt focal, té sentit també sobre les varietats de Riemann, però el seu estudi és força complicat ja que depèn de les variacions de curvatura en cada punt.

En aquesta tesi, s'aborda aquest estudi començant per les varietats de Riemann connexes i simplement connexes de curvatura constant, que són justament els models de les geometries no euclidianes.

Es fa una recopilació de resultats en aquest camp i s'aporten maneres de fer diferents aconseguint donar una fórmula general, en funció de la constant de curvatura c de la varietat, que en el cas $c = 0$ coincideix amb la fórmula (2).

Concretament es demostra la important fórmula següent:

Teorema 1. *Sigui K un conjunt fortament convex a X_c^2 (la varietat de Riemann de curvatura constant c), si $c \geq 0$, o fortament h-convex si $c < 0$, amb vora regular diferenciable $M = \partial K$. Llavors*

$$\int_M \tan_c(\frac{\rho(s)}{2})ds = F - F_e,$$

on ds significa la mesura de la longitud d'arc sobre M, F és l'àrea de K i F_e és l'àrea (algebraica) delimitada pel conjunt focal $F(M)$ de M. La funció $\tan_c$ és la funció tangent generalitzada, que ara no definim, però que coincideix essencialement amb la tangent ordinària quan $c > 0$ i amb la tangent hiperbòlica quan $c < 0$.

Posteriorment, usant els teoremes de comparació de Rauch, es donen resultats anàlegs als anteriors per a varietats de Riemann de curvatura acotada per sota. Per exemple,

Teorema 2. *Sigui M una varietat de Riemann completa i amb curvatura acotada $K \geq c$. Llavors*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{V(\rho_H(x))}{A(\rho_H(x))}dx \geq V(\Omega)\,,$$

on $V(\Omega)$ és el volum d'un domini convex, $V(\rho_H(x))$ i $A(\rho_H(x))$ són el volum i l'àrea d'una esfera de radi ρ_H a l'espai de curvatura constant c.

Aquest resultat generalitza la fórmula de Heinze-Karcher a espais de curvatura acotada.

- Albert Clop Ponte va llegir la seva tesi, dirigida per Joan Mateu i Joan Orobitg, titulada *Singularitats evitables per a funcions quasiregulars del pla*, el dia 20 de novembre de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Una funció $f : \Omega \to \mathbb{C}$ és quasiregular a l'obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ si té derivades de quadrat localment integrable a Ω i, a més, hi satisfà quasi per tot punt una equació de Beltrami,

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\,\partial f(z)$$

on $\mu : \Omega \to \mathbb{C}$ és una funció acotada a Ω, $\|\mu\|_\infty < 1$. Si a més és bijectiva, diem que f és quasiconforme. Per mesurar la quasiregularitat, diem que f és κ-quasiregular si $\|\mu\|_\infty \leq \kappa$. Així, doncs, les funcions 0-quasiregulars o 0-quasiconformes són, respectivament, analítiques o conformes. Existeixen definicions equivalents que permeten estendre la noció de quasiconformalitat a dimensions superiors o, fins i tot, a espais mètrics abstractes. Aquest és, de fet, un dels motius del creixent interès en aquesta classe de funcions des de diferents àrees de les matemàtiques.

Anomenem conjunt excepcional, o conjunt *evitable* a tot compacte del pla E per al qual es compleix la propietat següent:

si $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ és una funció analítica i acotada, aleshores f és constant.

Tot conjunt E amb longitud $\mathcal{H}^1(E) = 0$ és evitable, mentre que si $\dim(E) > 1$ llavors E no ho és. Diem, doncs, que $d = 1$ és la *dimensió crí tica*. Amb aquesta dimensió, i mesura de Hausdorff $\mathcal{H}^1$ finita, hi ha conjunts evitables (conjunts autosemblants adients) i conjunts que no ho són (si E és un segment, llavors existeix una funció analítica —de fet conforme— $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{D}$ que no és constant). Fruit dels treballs de David i Tolsa, entre d'altres, és sabut que la rectificabilitat i la curvatura de Menger són conceptes clau en la caracterització geomètrica dels conjunts evitables, coneguda com a *Problema de Painlevé*.

En analogia al cas holomorf, anomenem conjunt κ-evitable tot compacte E tal que:

si $f : \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C}$ és κ-quasiregular i acotada, aleshores f és constant.

El problema consisteix, doncs, a caracteritzar geomètricament els conjunts κ-evitables. Resultats previs d'Astala, Iwaniec i Martin, entre d'altres, mostren que $d = 1 - \kappa$ juga ara el paper de dimensió crítica: si $\mathcal{H}^d(E) = 0$ llavors E és κ-evitable (tal com passa quan $\kappa = 0$) mentre que per a tot $t > d$ existeixen conjunts no κ-evitables de dimensió t. Si $\kappa > 0$, obtenim la implicació

$$\mathcal{H}^d(E) \ \sigma\text{-finita} \ \Rightarrow \ E \text{ és } \kappa\text{-evitable}$$

que, per contra, és falsa si $\kappa = 0$. També construïm exemples E de conjunts no κ-evitables amb dimensió $\dim(E) = d$.

Dolzenko i Uy van resoldre la variant del Problema de Painlevé obtinguda tot reemplaçant les funcions analítiques acotades per funcions analítiques i *Hölder contínues d'exponent* α, és a dir Lip_α, on $0 < \alpha \leq 1$. En el corresponent problema quasiregular, demostrem que $d = (1 - \kappa) + \alpha(1 + \kappa)$ n'és la dimensió crítica. En concret, els conjunts amb $\mathcal{H}^d(E) = 0$ són κ-evitables, mentre que per tot $t > d$ existeix un conjunt no κ-evitable de dimensió d.

Hom també pot parlar de conjunts μ-evitables, si el que es vol és fer referència a una equació de Beltrami concreta, més que no pas a una família d'equacions uniformement el·líptiques. A priori, només esperaríem diferències significatives si el coeficient μ gaudeix d'una certa regularitat. Per a coeficients μ amb derivades de quadrat integrable, provem que els conjunts μ-evitables de longitud σ-finita són precisament els conjunts evitables de longitud σ-finita. És a dir, per a aquests coeficients μ (entre els quals n'hi ha que ni tan sols són continus), els operadors de Beltrami $\overline{\partial} - \mu\,\partial$ i de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ tenen els mateixos conjunts excepcionals de longitud σ-finita.

- Nuria Suárez de la Torre va llegir la seva tesi, dirigida per Antonio Susín Sánchez i Carlos García Gómez, titulada *Coupling Marker and Cell and Smoothed Particle Hydrodynamics for Fluid Animation* , el dia 22 de desembre de 2006. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En el món de l'animació de fluids amb base física, la resolució de les equacions de Navier-Stokes és un dels reptes més importants. Per a donar-ne una solució dins el marc de l'animació, el mètode proposat ha de ser ràpid, capaç de captar tots els detalls del moviment del fluid (com per exemple l'esquitxat) i de mantenir una certa capacitat per a ser manipulat per l'animador, fent possible la creació d'escenes fins i tot encara que no siguin físicament correctes. Sovint, l'ús d'un únic mètode no és una bona solució a causa, principalment, del comportament complicat dels fluids. En aquest treball, presentem un mètode híbrid en el qual es tracta d'aprofitar els avantatges dels dos mètodes més estesos en l'animació de fluids, evitant-ne els inconvenients. Aquests dos mètodes són:

- *Smoothed Particles Hydrodynamics* (SPH): amb plantejament lagrangià, aquest mètode considera que el fluid està compost per partícules. Cadascuna té les seves pròpies característiques materials, que són determinades mitjançant funcions de nucli que defineixen la influència local de les partícules. Aquest mètode posseix un gran nivell de detall, però és massa lent i necessita molts recursos computacionals, ja que el comportament de cada partícula depèn del de les seves veïnes a cada moment.
- *Marker and Cell* (MAC): amb plantejament eulerià, aquest mètode calcula els valors del fluid (velocitat i pressió) sobre un reticle en el domini de simulació. La posició del fluid es determina per mitjà de partícules marcadores que es mouen segons el camp de velocitats calculat. Encara que necessita d'un sistema iteratiu per al càlcul de les pressions, pot considerar-se com un mètode de simulació ràpid, però té tendència al suavitzat del comportament del fluid, i arriba a un nivell de detall menor que el SPH.

Així, quan ens enfrontem al problema de simular un gran volum de fluid en el qual els esdeveniments que necessiten un alt nivell de detall tenen lloc prop de la superfície (com una piscina o una banyera), sembla molt adequat

combinar ambdós mètodes. En aquest treball, hem fet exactament això: hem estudiat detalladament el MAC i el SPH, i hem construït les nostres pròpies versions d'ambdós; després els hem unit, usant MAC per a la part interna del fluid (més suau i regular) i SPH per a la resta. D'aquesta manera, millorem la velocitat de la simulació, conservant el nivell de detall del SPH en les zones necessàries i la seva flexibilitat (és possible forçar el moviment desitjat mitjançant forces que actuïn individualment sobre les partícules). Aquestes característiques converteixen aquest mètode híbrid en una eina molt interessant per a l'animació de fluids.

D'altra banda, com a complement natural del tema central d'aquest treball, hem construït també una eina de visualització bàsica, aplicant una tècnica ja existent de *Moving Least Squares* per a la visualització de geometries representades per punts, a la visualització del nostre fluid i fent les adaptacions necessàries.

- Gerard Ascensi Sala va llegir la seva tesi, dirigida per Joaquim Bruna Floris, titulada *Generadors de $L^p(\mathbb{R})$ amb translacions en temps i freqüència*, el dia 4 de juliol de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Aquesta memòria està estructurada en dues parts. La primera estudia els sistemes de generadors per translacions, els quals tenen sentit en qualsevol $L^p(\mathbb{R})$. Ens centrem sobretot en el cas $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, encara que també donem resultats en la resta d'espais. La segona part estudia els marcs (una generalització de les bases) en $L^2(\mathbb{R})$ que provenen d'agafar traslladades i modulades d'una funció (Gabor), o traslladades i dilatades (ondetes).

La primera part estudiarà els generadors per translacions. Prenem conjunts de funcions de la forma $T(\varphi, \Lambda) = \{\varphi(t - \lambda) \ : \ \lambda \in \Lambda\}$, on φ és una funció de $L^p(\mathbb{R})$ i Λ un conjunt discret de la recta. El que ens preguntem és quan un d'aquests conjunts serà un sistema de generadors per a $L^p(\mathbb{R})$, entenent per sistema de generadors un conjunt tal que les combinacions lineals dels seus elements són denses en l'espai corresponent.

Una de les preguntes típiques que ens podem fer sobre aquesta classe de sistemes és per a quines funcions φ existeix un conjunt de translacions Λ tal que $T(\varphi, \Lambda)$ sigui un sistema de generadors. De moment, aquest continua sent un problema obert. Estudiem un xic l'estat de la qüestió i ens dediquem a dos subconjunts concrets de generadors, els quasianalítics i els analítics. Per a aquests, donem condicions necessàries i suficients molt properes per caracteritzar-los i estudiem una mica com poden ser els conjunts de punts que després donaran lloc a sistemes de generadors.

Una altra pregunta habitual és, fixada una funció φ per a la qual existeixen conjunts Λ tals que $T(\varphi, \Lambda)$ genera un cert espai $L^p(\mathbb{R})$, intentar descriure tots els conjunts Λ amb aquesta propietat. Estudiem aquest problema per a dues funcions concretes, la funció de Poisson i la gaussiana respectivament. En el cas de Poisson, existia una caracterització d'aquests conjunts, i el que fem és generalitzar-la a casos similars. En els cas de la gaussiana, l'únic que podem fer és millorar les condicions que ja es coneixien, ja que sembla difícil una caracterització completa.

A la segona part, estudiem un problema anàleg, però en lloc de fer servir tan sols translacions hi afegim modulacions (Gabor) i dilatacions (ondetes). Aquesta classe de sistemes pot donar lloc a bases i marcs (sistemes de generadors amb molta més estructura), encara que només té sentit en $L^2(\mathbb{R})$.

L'estudi que fem és similar en els dos casos que tractem, Gabor i ondetes. Primer expliquem com discretitzar la transformada contínua. Després donem dos exemples concrets en casos molt particulars en els quals l'espai de transformades està compost per funcions holomorfes. En aquests casos el problema se simplifica i ja havia estat resolt. En tots dos casos, veiem que és pràcticament un accident que hi hagi un espai de fase enterament compost per funcions holomorfes.

Per a la resta de casos, aconseguim donar alguns resultats de mostreig que ens permeten donar condicions suficients per obtenir un marc.

També aconseguim algun resultat d'interpolació (el problema dual).

Finalment, en el cas de Gabor, inaugurem una nova via d'estudi, restringint-nos a una classe especial de funcions. Aconseguim veure que l'espai de fase té una extensió a funcions enteres en dues variables. Donem cotes sobre la varietat de zeros que sembla que poden donar lloc a resultats de mostreig millors dels que es coneixen fins ara.

- Sergi Simon i Estrada va llegir la seva tesi, dirigida per Juan J. Morales Ruiz (UPC) i Carles Simó i Torres (UB), titulada *On the Meromorphic Non-Integrability of Some Problems in Celestial Mechanics*, el dia 9 de juliol de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona.

Aquesta tesi presenta la demostració de la no-integrabilitat meromorfa de determinats problemes sorgits de la mecànica celeste, una condició sobre la integrabilitat parcial en un context hamiltonià més ampli, i, mitjançant aquesta condició, una restricció significativa de les demostracions de no-integrabilitat anteriors. Més concretament, podem dividir els resultats en tres apartats:

1. obstruccions a la integrabilitat *total*, en el sentit de Liouville-Arnold, per a hamiltonians concrets;
2. una condició sobre el nombre d'integrals primeres addicionals per a problemes d'un àmbit molt més general que engloba els problemes anteriors;
3. l'ús de la condició del punt **2** per a trobar obstruccions i/o restriccions a la integrabilitat *parcial* dels problemes del punt **1**.

En primer lloc, hem afegit una nova demostració de no-integrabilitat, més senzilla, a les ja existents (Tsygvintsev, Boucher i Weil) per al *Problema de tres cossos* amb masses arbitràries. Hem demostrat també, per primer cop, la no-integrabilitat total del *Problema de N cossos amb masses iguals*. Seguidament, partint d'un resultat de Maciejewski, Przybylska i Yoshida sobre l'existència d'una integral primera addicional per a hamiltonians clàssics de $n \geq 2$ graus de llibertat,

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) := \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{p}/2 + V(\boldsymbol{q}),$$

amb potencial $V(\boldsymbol{q})$ homogeni de grau enter, n'hem aportat una demostració alternativa i n'hem ampliat l'enunciat tot afegint-hi una descripció detallada, inèdita fins avui, de la correspondència entre les integrals primeres addicionals i els valors propis de la matriu hessiana $V''(\boldsymbol{c})$, avaluada en una solució homotètica $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^n$ qualsevol. En tercer lloc, i fent servir aquest resultat, hem demostrat, també per primer cop, l'absència d'una integral addicional per al problema de tres cossos (generalitzant així, en certa manera, els teoremes de Bruns i Julliard). La quarta novetat ha estat una fita superior per al nombre d'integrals primeres addicionals per a N=4,5,6 masses iguals. La cinquena nova contribució ha estat la demostració, usant la teoria de Morales-Ramis en la seva versió més general, de la no-integrabilitat del *Problema de Hill*, expressat a partir del hamiltonià

$$\mathcal{H}_H(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = H_2 + H_4 + H_6,$$

on

$$\begin{aligned} H_2 &= P^2/2 + Q^2/2, \\ H_4 &= -2Q^2(P_2Q_1 - P_1Q_2), \\ H_6 &= -4Q^2(Q_1^4 - 4Q_1^2Q_2^2 + Q_2^4). \end{aligned}$$

Aquests resultats han fet palès un grau força variable de complexitat teòrica. En efecte, les demostracions per als problemes de N cossos no requerien més que l'exploració dels valors propis d'una matriu, amb l'avantatge relatiu de conèixer-ne quatre en virtut de les integrals primeres clàssiques. Per tant, no foren necessàries totes les equacions variacionals, sinó aquelles corresponents a aquests quatre valors propis; aquesta primera correspondència s'estableix a través de la reducció del sistema i la introducció de les anomenades equacions variacionals normals, ja descrites per S. Ziglin, J. J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis, J.-A. Weil i d'altres. El Problema de Hill, però, ha requerit l'ús del sistema

variacional complet atès que només gràcies a les funcions especials introduïdes al procés de variació de constants fou possible assegurar la presència d'obstruccions a la integrabilitat. Els lemes previs emprats per a la demostració del nostre resultat sobre integrals primeres addicionals es poden considerar també una novetat, si bé són en llur majoria variacions de lemes i proposicions ja coneguts. Malgrat tot, és digne d'esment el seguit de resultats puntuals que giren entorn dels invariants racionals d'un cert grup lineal algebraic.

Aquests resultats són un motiu afegit per considerar la teoria de Galois diferencial, i en particular la teoria de Morales-Ramis, com un entorn summament adequat per a la detecció d'obstruccions a la integrabilitat total i parcial de sistemes hamiltonians.

- Miquel Brustenga i Bort va llegir la seva tesi, dirigida per Pere Ara Bertrán, titulada *Àlgebres associades a un buirac*, el dia 26 de juliol de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Donat un buirac (graf finit orientat) E i un cos K podem considerar diverses K-àlgebres associades a E. Per exemple, l'àlgebra de camins, $P(E)$, que és la K-àlgebra amb una K-base donada pel conjunt de tots els camins (orientats) en el buirac E, amb el producte induït per la concatenació de camins. L'àlgebra de camins de Leavitt, $L(E)$, es pot obtenir com una localització universal de l'àlgebra de camins. Aquesta tesi tracta de la construcció d'embolcalls regulars de von Neumann de les àlgebres de camins de Leavitt, que podem pensar com a «àlgebres de fraccions totals (generalitzades)» d'aquestes. La construcció d'aquest embolcall regular, en símbols $Q(E)$, és de tal manera que podem calcular $\mathcal{V}(Q(E))$, el monoide de classes d'isomorfia de mòduls projectius finitament generats. De fet, $\mathcal{V}(Q(E))$ resulta ser isomorf a $\mathcal{V}(L(E))$ que recentment ha estat identificat amb un monoide associat al buirac E en [P. Ara, M. A. Moreno, E. Pardo, Nonstable K-theory for graph algebras, *Algebras Repr. Theory*, 10:157–158, 2007]. La nostra construcció resulta rellevant per al problema següent proposat per Goodearl a [von Neumann regular rings and direct sum decomposition problems, *Abelian groups and modules (Padova, 1994)*, volume 343 of *Math. Appl.*, pages 249–255. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995].

Problema obert: Quins monoides abelians s'obtenen com a $\mathcal{V}(R)$ per a un anell regular R?

També desenvolupem tècniques per a calcular el K_1 dels anells involucrats, que ens permeten obtenir càlculs explícits de $K_1(L(E))$ i $K_1(Q(E))$. En particular, donem una fórmula per al càlcul del K_1 d'anells de polinomis de Laurent córner-guerxos i demostrem que les àlgebres de camins de Leavitt són Morita equivalents a anells d'aquesta forma. Posteriorment, el valor de $K_1(L(E))$ junt amb la successió exacta de localització universal de Schofield en teoria K ens permet estudiar els mòduls finitament presentats sobre l'àlgebra de camins de Leavitt de E. Per aconseguir aquest propòsit, ens ha calgut generalitzar alguns resultats coneguts per al cas de l'àlgebra lliure a l'àlgebra de camins que tenen importància per si mateixos. Com a resultat digne de menció, veiem que l'àlgebra de camins admet una versió de l'algoritme feble de Cohn (amb definicions lleugerament diferents). Utilitzant l'algoritme feble podem provar el resultat següent: tot $P(E)$-mòdul dreta finitament relacionat P conté un submòdul projectiu Q tal que P/Q té K-dimensió finita, que és una generalització d'un Teorema de Lewin sobre l'àlgebra lliure. Aquest resultat juga un paper clau en l'estudi posterior dels mòduls finitament presentats sobre $L(E)$. També veiem que $Q(E)$ és la localització perfecta dreta maximal de $P(\overline{E})$, on $\overline{E}$ denota el *buirac invers* de E, és a dir, el buirac amb els mateixos vèrtexs que E però amb les fletxes en sentit contrari.

- Elisenda Feliu i Trijueque va llegir la seva tesi, dirigida per José Ignacio Burgos Gil, titulada *On higher arithmetic intersection theory*, el dia 29 de novembre de 2007. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

Aquesta tesi s'emmarca en el programa de la geometria d'Arakelov que es basa en obtenir una teoria d'intersecció aritmètica seguint els passos de la teoria d'intersecció algebraica. Els resultats d'aquesta tesi contribueixen al programa de desenvolupar una teoria d'intersecció aritmètica superior.

Més concretament, hem desenvolupat una teoria d'intersecció superior en varietats aritmètiques, «à la» Bloch, tot modificant els grups de Chow superiors definits per Bloch via una construcció explícita del regulador de Beilinson en termes de cicles algebraics.

Això és, hem construït un representant del regulador de Beilinson usant el complex de Deligne de formes diferencials. Tot seguit, hem desenvolupat una teoria de grups de Chow aritmètics superiors, $\widehat{CH}^p(X,n)$, per a qualsevol varietat aritmètica X sobre un cos. Demostrem que hi ha un producte associatiu i commutatiu en $\widehat{CH}^*(X,*) = \bigoplus_{p,n} \widehat{CH}^p(X,n)$, compatible amb el producte d'intersecció algebraic, que dóna per tant un producte d'intersecció aritmètic superior per varietats aritmètiques sobre un cos.

Tot seguit, ens centrem en la relació entre els grups de Chow aritmètics superiors definits i els K-grups aritmètics superiors $\widehat{K}_n(X)_{\mathbb{Q}}$. Per tal de seguir l'esquema algebraic, hauríem de tenir una descomposició dels grups $\widehat{K}_n(X)_{\mathbb{Q}}$ donada pels espais de vectors propis de les operacions Adams $\Psi^k : \widehat{K}_n(X)_{\mathbb{Q}} \to \widehat{K}_n(X)_{\mathbb{Q}}$. Per la naturalesa de la definició de $\widehat{K}_n(X)$, tant considerant la fibra homotòpica com els grups d'homotopia modificats de Takeda, és aparentment necessari tenir una descripció de les operacions d'Adams en K-teoria algebraica $\Psi^k : K_n(X)_{\mathbb{Q}} \to K_n(X)_{\mathbb{Q}}$, en termes d'un morfisme de cadenes, compatible amb el representant del regulador de Beilinson *ch*.

En la tesi obtenim un morfisme de cadenes que indueix les operacions d'Adams en K-teoria algebraica superior, sobre el cos dels nombres racionals. Aquesta definició és de naturalesa combinatòrica i a més, el morfisme està construït amb la idea en ment que hauria de commutar amb el regulador de Beilinson *ch* donat per Burgos i Wang.

Tot seguit demostrem que aquest morfisme de cadenes commuta amb *ch* i usem aquest fet per definir operacions d'Adams en els K-grups aritmètics superiors tensorialitzats amb $\mathbb{Q}$.

El desenvolupament d'aquest treball requeria eines per comparar morfismes dels K-grups algebraics superiors a grups de cohomologia adequats o als mateixos K-grups. Dediquem un capítol de la tesi a estudiar aquestes comparacions de forma general, donant teoremes que detallen condicions suficients per tal que dos morfismes coincideixin. Les demostracions es recolzen en la teoria homotòpica de feixos simplicials.

Com a aplicació, demostrem que les operacions d'Adams definides per Grayson coincideixen, per a tot esquema noetherià regular de dimensió de Krull finita, amb les operacions d'Adams definides per Gillet i Soulé. En particular, se segueix que les operacions d'Adams definides per Grayson satisfan les identitats usuals d'un λ-anell, fet que no quedava demostrat en l'article de Grayson. Els resultats de comparació s'usen també per veure que les operacions d'Adams que definim nosaltres coincideixen amb les operacions d'Adams definides per Gillet i Soulé.

- Francesco Vecil va llegir la seva tesi, dirigida per José Antonio Carrillo de la Plata i Naoufel Ben Abdallah, titulada *A contribution to the simulation of Vlasov-based models*, el dia 17 de desembre de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

És una tesi doctoral de matemàtica aplicada, i tot el material desenvolupat està pensat per a l'aplicació a problemes de física o enginyeria. El fi és la realització de programari per a simulacions numèriques de plasmes o de transistors de diferents tipus. L'equació de Vlasov és una equació de transport, i és l'eina fonamental al llarg de la tesi per a la descripció del moviment de les càrregues elèctriques dins d'un dispositiu electrònic, és a dir, dins d'un material semiconductor, sota l'efecte d'un camp de força aplicada i, eventualment, dels fenòmens d'*scattering* (qualsevol cosa que faci desviar els electrons de la trajectòria balística).

La tesi comença amb la descripció dels mètodes numèrics, segueix amb uns tests simples per a veure si aquests blocs fonamentals funcionen correctament, en casos força coneguts i utilitzats en la literatura científica; així, podem fer comparacions amb els resultats obtinguts per d'altres autors amb altres mètodes. Després, s'apliquen els esquemes a uns models per a la simulació de díodes clàssics, i a uns models que aproximen a diferents nivells una equació cinètica amb un mecanisme de relaxació com a operador d'*scattering*. Finalment, a l'últim capítol, se simula un MOSFET (un tipus de transistor) d'escala nanomètrica, descrit per un model mixte quàntic-clàssic: es parla d'acoblament dimensional, atès que en una dimensió els electrons es descriuen com a partícules, i en l'altra com a ones. Un altre tipus d'acoblament seria el geomètric, en el qual una part del dispositiu es descriu amb un model i una altra amb un altre model, amb condicions d'interfície entre els dos.

El primer capítol s'obre amb les interpolacions WENO puntuals: allà on la funció de distribució de càrregues té gradients molt violents a l'espai de fases, la interpolació polinomial simple i directa produeix oscil·lacions espúries, és a dir, que una part de la variació total es deu al mètode d'interpolació i no al problema en si mateix, i la inestabilitat consegüent treu sentit físic als resultats. WENO prova de corregir aquests inconvenients, amb resultats satisfactoris. Després d'això, s'explica l'*splitting*: la idea per a resoldre un problema complicat és intentar dividir-lo en subproblemes més simples per als quals tinguem solucions, i de vegades es pot aproximar la solució del problema total mitjançant les solucions dels subproblemes. El capítol introdueix, doncs, dos mètodes per a resoldre l'advecció lineal (un de conservatiu i un altre no), basats en característiques. Les últimes seccions es dediquen al càlcul dels camps de força, a partir de la resolució de l'equació de Poisson, fins al càlcul del potencial quan hi ha fenòmens quàntics, pels quals s'ha de diagonalitzar una matriu deguda a l'equació de Schrödinger, escriure les derivades en sentit direccional dels seus autovalors i autovectors i construir una iteració de Newton-Raphson.

El capítol 2 aplica els mètodes per característiques i *splitting* a uns tests coneguts: una equació de Vlasov amb potencial donat i una relaxació com a operador d'scattering, una equació de Vlasov-Fokker-Planck, l'esmorteïment de Landau i un exemple d'inestabilitat, on s'acopla el transport al càlcul autoconsistent del potencial, i un díode simple.

Al capítol 3 s'apliquen les tècniques per a simular uns transistors més complicats, en què les col·lisions són degudes a la interacció dels electrons amb els fonons (vibracions del reticle cristal·lí); a més a més, s'admeten fonons de diferents tipus i amb diferents freqüències.

El capítol 4 és una mica diferent dels altres, i presenta un treball fet en col·laboració amb els professors Thierry Goudon i Pauline Godillon-Lafitte de la Université de Lille. La finalitat d'aquest treball no és l'aplicació directa a cap simulació, sinó donar resposta a una pregunta més general: partint d'una equació cinètica simplificada (sense camp de força i amb relaxació com a operador d'*scattering*) amb canvi d'escala difusiu, es poden escriure models intermedis entre el nivell microscòpic, és a dir, l'equació cinètica, que és força costosa (en terminis de temps) de resoldre, i la seva aproximació macroscòpica més grossera, és a dir, l'equació de la calor? Es desenvolupen models intermedis així com els mètodes numèrics per a resoldre'ls, i els resultats són bons també en el cas del test de Su-Olson, un test estàndard per aquests problemes.

L'últim capítol, que ha estat realitzat essencialment al laboratori MIP, es proposa simular un MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor) d'escala nanomètrica: en una de les dimensions, els electrons són confinats en un pou de potencial per dues capes d'òxid de silici; llavors els electrons tenen nivells d'energia discrets (que en la literatura es coneixen com a

subbandes), i en aquesta dimensió es comporten com a ones, essent els seus estats descrits per l'equació de Schrödinger a l'estat estacionari. En les altres dimensions, que són més llargues, els electrons es comporten com a partícules, llavors són transporats clàssicament. La densitat de càrrega és un estat mixt, és a dir que depèn tant de la part clàssica com de la part quàntica. Com a estructura de banda s'utilitza la versió més simplificada, amb un únic mínim i aproximació parabòlica, i com a operador d'*scattering* un operador de relaxació, ja que l'objectiu de l'estudi és veure si els mètodes utilitzats funcionen, i en cas d'èxit passar a una descripció més precisa, amb estructura de banda de tres valls, factor de no-parabolicitat i un operador d'scattering que tingui en compte la dispersió deguda a la interacció amb fonons de diferents tipus, a la rugositat i a la interacció coulombiana. A part, els temps de computació (molt llargs degut al fet que el model és microscòpic i calcula tots els estats transitoris i no només l'estat estacionari) es poden reduir mitjançant una implementació paral·lela. Els resultats han estat molt satisfactoris.

- Helena Soares va llegir la seva tesi, dirigida per Rosa M. Miró-Roig, titulada *Steiner Vector Bundles on Algebraic Varieties*, el dia 11 d'abril de 2008. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria, Universitat de Barcelona.

El problema de la classificació de fibrats vectorials holomorfs sobre varietats algebraiques va aparèixer a la dècada dels cinquanta amb els treballs d'Atiyah, Grothendieck, entre d'altres. Des de llavors, aquesta qüestió ha captat l'atenció de molts matemàtics i ha tingut un desenvolupament extraordinari.

El conjunt de les classes d'isomorfia dels fibrats vectorials sobre una varietat algebraica és massa gran perquè es pugui estudiar directament i esdevé necessari posar-hi restriccions. Durant aquests anys les contribucions al problema de l'estudi dels fibrats vectorials han pres diferents direccions: l'estudi de mònades o d'espais de moduli de fibrats semiestables, criteris d'*splitting*, caracterització cohomològica, o l'estudi de determinades famílies de fibrats vectorials són alguns exemples de diferents formes de tractar aquest problema.

L'objectiu principal d'aquesta tesi és definir i estudiar una família nova de fibrats vectorials sobre varietats algebraiques llises i irreductibles, generalitzant els coneguts fibrats d'Steiner sobre un espai projectiu.

Un fibrat vectorial E sobre una varietat algebraica llisa irreductible X es diu un *fibrat d'Steiner* si està definit per una successió exacta

$$0 \to F_0^s \xrightarrow{\varphi} F_1^t \to E \to 0,$$

on $s, t \geq 1$, i (F_0, F_1) és una parella de fibrats vectorials sobre X que compleix les condicions següents:

i) (F_0, F_1) és fortament excepcional;

ii) $F_0^\vee \otimes F_1$ està generat per seccions globals.

Definits els fibrats d'Steiner en un context més ampli, el nostre objectiu següent és estudiar-ne les propietats.

En primer lloc, caracteritzem els fibrats d'Steiner excepcionals E sobre varietats algebraiques llises irreductibles. Més concretament, demostrem que si E és un fibrat general d'Steiner definit per la successió exacta

$$0 \to F_0^s \xrightarrow{\varphi} F_1^t \to E \to 0,$$

on $s, t \geq 1$, i $\lambda := h^0(F_0^\vee \otimes F_1) \geq 3$, llavors E és excepcional si i només si $\chi(\mathrm{End}E) = 1$. Equivalentment, demostrem que E és excepcional si i només si $s = a_k$ i $t = a_{k+1}$, on $a_k = \frac{(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4})^k - (\lambda-\sqrt{\lambda^2-4})^k}{2^k\sqrt{\lambda^2-4}}$, $k \geq 1$, són les solucions de $\chi(\mathrm{End}E) = 1$.

La segona propietat que estudiem és la simplicitat dels fibrats d'Steiner. En concret, demostrem que un fibrat d'Steiner general E és simple si i només si $\chi(\mathrm{End}E) \leq 1$.

Després, ens concentrem en el problema de l'estabilitat dels fibrats d'Steiner excepcionals i aconseguim donar-ne una resposta parcial. Donat un fibrat d'Steiner excepcional E provem que E és estable en el cas que X és una hipersuperfície llisa irreductible de grau $1 \leq d \leq n-1$, $F_0 = \mathcal{O}_X(-1)$, $F_1 = \mathcal{O}_X$, amb $\lambda = h^0(\mathcal{O}_X(1)) \geq 3$.

Malgrat tot, tractant aquest problema, provem un resultat molt més general d'estabilitat de fibrats excepcionals sobre interseccions completes en $\mathbb{P}^n$. Més precisament, provem que tot el fibrat excepcional E sobre una intersecció completa llisa $Y \subset \mathbb{P}^n$ de dimensió 3 i de tipus $(d_1, \ldots, d_{n-3})$, amb $d_1 + \cdots + d_{n-3} \leq n$ i $n \geq 4$, és estable.

Finalment, estudiem el problema de la caracterització cohomològica dels fibrats d'Steiner. Provem un resultat que ens dóna condicions cohomològiques suficients perquè un fibrat sobre una varietat projectiva llisa irreductible sigui un fibrat d'Steiner. Tanmateix és possible donar caracteritzacions cohomològiques completes en alguns casos.

- Benito Hernández Bermejo va llegir la seva tesi, dirigida per Isaac García Rodríguez, titulada *The Jacobi identities for finite-dimensional Poisson structures: a P.D.E. based analysis of some new constructive results and solution families*, el dia 17 d'abril de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtica de la Universitat de Lleida.

Les equacions de Jacobi constitueixen un conjunt d'equacions diferencials parcials no lineals que sorgeix de l'aplicació en un sistema arbitrari de coordenades d'una estructura de Poisson definida en una varietat llisa de dimensió finita. Certes solucions antisimètriques d'aquestes equacions s'investiguen en aquesta dissertació. Això es fa des d'una perspectiva doble incloenthi tant la determinació de famílies de solucions noves com la construcció global d'anàlisis de Darboux de les estructures de Poisson. La majoria dels resultats generals investigats es refereixen al cas de solucions de dimensió arbitrària. La perspectiva així obtinguda és d'interès en vista del relativament modest nombre de famílies de solucions d'aquesta classe comunicades en la literatura. Així mateix, l'anàlisi global de Darboux de les matrius d'estructura dóna, en primer lloc, la determinació global de conjunts complets d'invariants distingits funcionalment independents, proporcionant així una descripció global de l'estructura simplèctica de l'espai de fases de qualsevol sistema de Poisson associat; i en segon lloc, la determinació constructiva i global de la forma canònica de Darboux. Aquest tipus d'anàlisi és d'interès perquè la construcció de les coordenades de Darboux és només coneguda per una mostra limitada d'estructures de Poisson i, a més a més, el fet de realitzar globalment tal reducció millora l'abast del teorema de Darboux, les úniques garanties del qual en principi són l'existència local de les coordenades de Darboux. En aquest treball, aquestes reduccions a vegades fan ús de reparametritzacions del temps, així en acord amb les definicions usuals d'equivalència de sistemes. De fet, les reparametritzacions del temps juguen un paper significatiu en la comprensió de les condicions sota les quals la forma canònica de Darboux es pot implementar globalment, una qüestió també investigada en detall en aquesta tesi. Les implicacions d'aquests resultats dins la connexió amb la integrabilitat són també considerades en aquest context.

La tesi s'estructura de la manera següent: el capítol 1 és una revisió de diversos resultats clàssics i coneguts que descriuen el marc bàsic de la investigació. Les contribucions originals de la tesi s'inclouen en els capítols 2, 3 i 4. El treball acaba en el capítol 5 amb la presentació d'algunes conclusions.

- Adolfo Díaz Cordero va llegir la seva tesi, dirigida per Maria Isabel García Planas, titulada *Sistemas singulares. Invariantes y formas canónicas*, el dia 22 de setembre de 2008. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya.

Els objectes tractats en aquesta tesi són sistemes dinàmics lineals singulars invariants en el temps $E\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, els quals representem mitjançant quaternes de matrius $(E, A, B, C) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \times M_{n\times m}(\mathbb{C}) \times M_{p\times n}(\mathbb{C})$.

L'estudi se centra en la relació d'equivalència, que anomenem semblança per realimentació proporcional i derivada i injecció externa proporcional i derivada, que és la que admet canvis de base en els espais d'estats, d'entrades i de sortides, realimentació d'estats tant proporcional com derivada, injecció externa també proporcional i derivada i, a més, premultiplicació de l'equació d'estats per una matriu invertible.

Aquesta relació es pot considerar com la generalització natural de la semblança per a matrius quadrades i la semblança per blocs de la qual s'obté la forma reduïda de Kronecker. Amb els estudis realitzats fins ara, la realimentació derivada així com la injecció externa derivada no estaven incloses en la relació, però si es té en compte que els conceptes de controlabilitat i observabilitat d'un sistema, tan importants en teoria de control, porten implícita la condició necessària que les matrius E i A del sistema siguin invertibles o s'hi han de poder transformar mitjançant realimentacions proporcionals i/o derivades i injeccions externes porporcionals i/o derivades, ens indueixen a introduir aquestes accions a la relació de equivalència. Cal observar que en el cas de sistemes estàndard les realimentacions proporcionals i les injeccions externes han estat incloses en la relació d'equivalència per molts autors des de fa temps.

Per aquesta relació d'equivalència, el fet de trobar una forma reduïda canònica és un problema obert, del qual es dóna solució en aquesta tesi en el cas de sistemes regularitzables, que cal dir que són aquells en els quals o bé són regulars o bé mijançant realimentació tant proporcional com derivada i injecció externa també tan proporcional com derivada, el sistema es transforma amb un de regular. Recordem que els sistemes regulars són aquells per als quals es garanteix l'existència de solució única per a qualsevol condició inicial consistent.

Per aquesta relació d'equivalència sobre el conjunt obert i dens dels sistemes regularitzables, també es troba un conjunt complet d'invariants que permet decidir, donada una quaterna qualsevol, a quina classe d'equivalència pertany.

S'aborda també el càlcul de deformacions versals per la relació d'equivalència seguint les tècniques geomètriques introduïdes per V. I. Arnold en el cas particular de la varietat diferenciable de les matrius quadrades en les quals actua el grup lineal. Una aplicació de la descripció de deformacions miniversals explícites és l'estudi de perturbacions locals i l'obtenció de la dimensió de les diferents òrbites. Es realitza també l'anàlisi de l'estabilitat estructural caracteritzant les quaternes estructuralment estables.